اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات الحل

المدة: 02 ساعة

التمرين 01: (06 نقاط)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\ln(2e^x+1)\right)$ تساوي: ب) $\ln 2$

التبرير :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\ln(2e^x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^{-x}+\ln(2e^x+1)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{-x}(2e^x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln(2+\cancel{e^{-x}}^{0})$$

$$=\boxed{\ln(2)}$$

---

2) الدالة f معرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

ب) الدالة f فردية

التبرير : لدينا D_f متناظرة بالنسبة للعدد 0

ولدينامن أجل كل $x\in D_f$

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\boxed{-f(x)}$$

---

3) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'-(\ln 2)y-\ln 8=0$

الذي يحقق $y(0)=1$ هو: أ) $y=2^{x+2}-3$

التبرير : لدينا $y'=(\ln 2)y+\ln 8$; مجموعة حلول المعادلة

التفاضلية هي الدوال من الشكل: $f(x)=Ce^{(\ln 2)x}-\dfrac{\ln 8}{\ln 2}$

أي $f(x)=C\times 2^x-3$

و بما أن $f(0)=1$ فان $C\times 2^0-3=1$ أي $C=4$

ومنه $f(x)=4\times 2^x-3=\boxed{2^{x+2}-3}$

---

4) إذا كان :

$$S=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots\cdots+\ln\left(\frac{2026}{2025}\right)$$

فان: ج) $e^S=2026$

التبرير : لدينا

$$S=\ln\left(\cancel{2}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\cdots\times\frac{\cancel{2025}}{\cancel{2024}}\times\frac{2026}{\cancel{2025}}\right)$$

$$=\ln(2026)$$

ومنه : $e^S=\cancel{e}^{\ln(2024)}=\boxed{2026}$

التمرين 02: (06 نقاط)

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) $f'(0)=-1$ ، $f'(1)=0$ و $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+e-3}{x-1}=f'(1)=0$

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(h)+1}{h}=f''(0)=0.$$

3) معادلة المماس (T) هي $y=-x+1$

ومعادلة المستقيم المقارب (D) هي $y=3$.

4) المعادلة $f(x)=mx+1$ تقبل ثلاث حلول من أجل $m\in]-1;0[$ (مناقشة دورانية - مركز الدوران $B(0;1)$)

5) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

- كتابة $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$: الدالة h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $h'(x)=\dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

* من اجل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $[f(x)]^2>0$ أي إشارة $h'(x)$ نفس إشارة $-f'(x)$.

* ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\cancel{f(x)}_{3}}=\dfrac{1}{3}$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\cancel{f(x)}_{+\infty}}=0$$

- جدول تغيرات الدالة h.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{1}{3-e}$	↘	0

التمرين 03: (08 نقاط)

I) g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=(ax+b)e^{-x+2}+c$ و من أجل $x\in\mathbb{R}$

لدينا: $g'(x)=(-ax-b+a)e^{-x+2}$

1) تبين أن $a=1$ ، $b=-2$ و $c=e$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\cancel{(ax+b)e^{-x+2}}_{0}+c=c$

ومن الجدول $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=e$ ومنه $\boxed{c=e}$

لدينا: $\begin{cases} g(3)=e+e^{-1} \\ g'(3)=0 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} (3a+b)e^{-1}+\cancel{e}=\cancel{e}+e^{-1} \\ (-2a-b)e^{-1}=0 \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} 3a+b=1 \\ -2a-b=0 \end{cases}$ بالجمع طرفا لطرف نجد: $\boxed{a=1}$ ثم $\boxed{b=-2}$

ومنه $g(x)=(x-2)e^{-x+2}+e$

2) حساب $g(1)$ و إشارة $g(x)$: $g(1)=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=ex-e-(x-1)e^{-x+2}$

1)

$f(x)=ex-e-(x-1)e^{-x+2}$

$=e(x-1)-(x-1)e^{-x+2}$

$=\boxed{(x-1)\left(e-e^{-x+2}\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\underset{-\infty}{x-1})\left(e-\cancel{e^{-x+2}}_{-\infty}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\underset{+\infty}{x-1})\left(e-\cancel{e^{-x+2}}_{0}\right)=+\infty$

2) أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$f'(x)=e-(-x+1+1)e^{-x+2}$

$=(x-2)e^{-x+2}+e=g(x)$

ب) اتجاه تغير الدالة f: الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) أ) حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ex]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ex]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-e-\cancel{(x-1)e^{-x+2}}_{0}\right]=-e$

تفسير النتيجة بيانيا: $y=ex-e$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-(x-1)e^{-x+2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(C_f) يقطع (Δ) في $(1;0)$		(C_f) تحت (Δ)

4) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ).

نضع $f'(x)=e$ أي $(x-2)e^{-x+2}+e=e$ ومنه

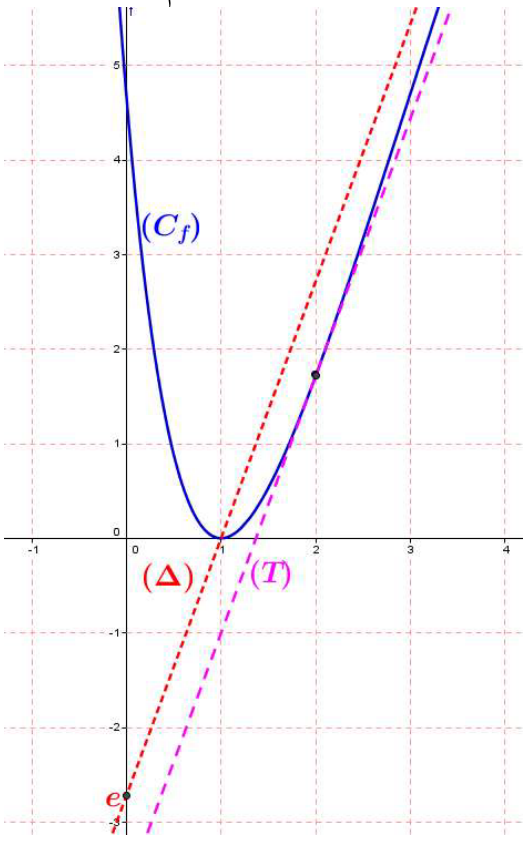
$(x-2)e^{-x+2}=0$ أي $x-2=0$ ومنه $x=2$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 2 معادلته .

أي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

ومنه: $y=e(x-2)+e-1$ $(T): y=ex-e-1$

5) لدينا: $f(0)\simeq 4,67$ -رسم: (T)، (Δ) و (C_f).



6) $f(x)=ex-e-(x-1)e^{-x+2}$

مناقشة عدد حلول المعادلة: $(e-m)e^{x-2}=-x+1$.

$(e-m)e^{x-2}\times e^{-x+2}=(-x+1)\times e^{-x+2}$

أي : $e-m=(-x+1)\times e^{-x+2}$

معناه : $-m=-(x-1)\times e^{-x+2}-e$

نضيف ex إلى طرفي المعادلة فنجد :

$ex-m=ex-e-(x-1)\times e^{-x+2}$

وتكافئ : $f(x)=ex-m$

حلول المعادلة تمثل فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m). ذو المعادلة : $(\Delta_m): y=ex-m$

(مناقشة مائلة) : $f(x)=ex-m$

$(T): y=ex-e-1$

$(\Delta): y=ex-e$

قيم $-m$	قيم الوسيط m	عدد حلول المعادلة
$-m\in]-\infty;e-1]$	$m\in[-e+1;+\infty[$	لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$
$-m=e-1$	$m=-e+1$	حل مضاعف
$-m\in]e-1;e[$	$m\in]-e;-e+1[$	حلان متمايزان
$-m\in[e;+\infty[$	$-m\in]-\infty;-e]$	حل وحيد